

Розв'язки завдань 1 етапу Всеукраїнської Інтернет-олімпіади з астрономії

10 клас

25 листопада – 1 грудня 2024 року

1. Підсвіtimo Землю (Решетник В.) 5 балів

В недалекому майбутньому наукова експедиція відправилась на Місяць. В рамках цієї експедиції троє астронавтів працюють разом вночі десь поблизу своєї бази в морі Криз (Mare Crisium). Світла від серпа Землі було недостатньо, тому вони користуються ліхтариками. В якийсь момент двоє астронавтів спрямували свої ліхтарі на Землю. На скільки зміниться видима зоряна величина світіння ліхтарів для земного спостерігача, коли третій астронавт також спрямує свого ліхтаря на Землю? Вважайте ліхтарі однаковими.

Розв'язок

Зміна зоряної величини визначається формулою Погсона:

$$m_2 - m_1 = -2.5 \lg \frac{E_2}{E_1}$$

Збільшення кількості ліхтарів еквівалентно збільшенню інтенсивності світла. Тому створена ними освітленість буде наступною

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{3}{2}$$

Отже зміна блиску буде $m_2 - m_1 \approx -0.44$, знак мінус свідчить про те, що об'єкт стане яскравішим.

Якщо третій астронавт спрямує свій ліхтар на Землю, видима зоряна величина світіння ліхтарів зменшиться (об'єкт стане яскравішим) приблизно на 0.44 зоряної величини.

2. Сонце по небу ходить (Марсакова В.) 10 балів

1) На якій найбільшій висоті може бути Сонце та в який день року це може трапитись а) на широті 50 градусів, б) на екваторі Землі, в) на південному полюсі Землі? Відповідь обґрунтуйте малюнками та розрахунками.

2) В який день року ви можете спостерігати, що Сонце сходить точно на сході, а заходить точно на заході, якщо ви знаходитесь а) на широті 50 градусів, б) на екваторі Землі, в) на південному полюсі Землі? Відповідь обґрунтуйте малюнками та розрахунками.

3) У деякий день на деякій широті Сонце у своєму найнижчому добовому положенні опинилось рівно на горизонті. У полудень того ж дня його висота була 40 градусів. На якій широті це відбувалося, та яке в цей день було схилення Сонця?

Атмосферною рефракцією знехтувати у всіх питаннях.

Розв'язання:

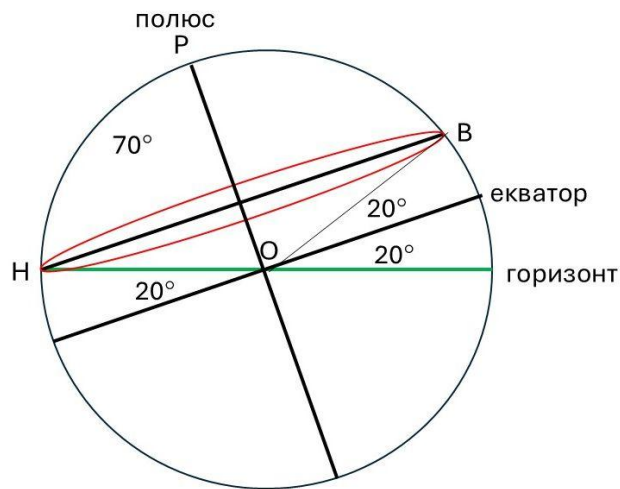
1) а) $(90-\varphi)+23,5=63,5^\circ$ у день літнього сонцестояння, б) 90° у дні весняного та осіннього рівнодення, в) $23,5^\circ$ у день 22 грудня (зимового сонцестояння).

2) а) б) в) у дні рівнодень.

3) Кут між положеннями нижньої та верхньої кульмінації Сонця

$\angle \text{НОВ} = 180 - 40 = 140^\circ$ градусів. Половина цього кута є висотою одного з полюсів

світу, а отже $\varphi = \pm 70^\circ$. Висота верхньої точки екватора в такому випадку 20 градусів, а отже, схилення Сонця $\delta = \pm 20^\circ$. Тобто при $\varphi = +70^\circ$ $\delta = +20^\circ$, а при $\varphi = -70^\circ$ $\delta = -20^\circ$.



3. Транзит (Білоус О.) 10 балів

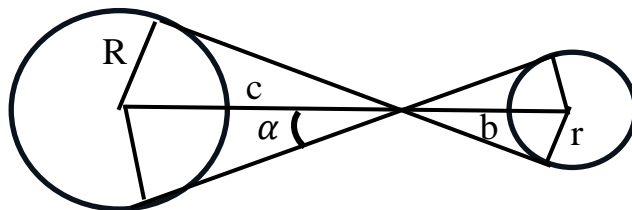
Маємо систему планета – зоря, радіус зорі $4.8 \cdot 10^5$ км, а радіус планети $9.5 \cdot 10^4$ км. Тривалість проходження планети диском зорі для марсіанського спостерігача становить 1 земну годину. Період обертання системи дорівнює 72 земні години. Оцініть величину падіння блиску зорі під час транзиту та відстань між компонентами. Вважайте, що промінь зору лежить у площині орбіти системи.

Розв'язання

$$\frac{E_1}{E_2} = 10^{0.4(m_2 - m_1)} = \frac{\pi R^2 \sigma T^4}{\pi R^2 \sigma T^4 - \pi r^2 \sigma T^4} = \frac{R^2}{R^2 - r^2};$$

$$10^{0.4\Delta m} = \frac{R^2}{R^2 - r^2};$$

$$\Delta m = 2,5 \lg \frac{R^2}{R^2 - r^2} = 2,5 \lg \frac{(4,8 \cdot 10^5)^2}{(4,8 \cdot 10^5)^2 - (9,5 \cdot 10^4)^2} = 0,043^m;$$



$$\sin \alpha = \frac{R}{c} = \frac{r}{b};$$

$$c + b = a; \quad c = a - b;$$

$$a = \frac{(R + r)b}{r} = \frac{R + r}{\sin \alpha};$$

$$T = 360^\circ$$

$$t = \alpha$$

$$\alpha = \frac{t \cdot 360^\circ}{T} = \frac{1 \cdot 360^\circ}{3 \cdot 24} = 5^\circ;$$

$$a = \frac{R + r}{\sin \alpha} = \frac{4,8 \cdot 10^5 + 9,5 \cdot 10^4}{\sin 5^\circ} = 660 \cdot 10^4 \text{ (км)} = 0,044 \text{ (а. о.)};$$

В: $0,043^m$; $0,044$ (а. о.).

4. Гарячі надра (Слюсарев І.) 15 балів

Результати спостережень на нейтринній обсерваторії Борексіно (<https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.101.012009>) показали, що за 12 років було зареєстровано 53 антинейтрино, що народилися під час радіоактивного розпаду U^{238} та Th^{232} у надрах Землі. Цих даних вистачило, щоб визначити повний вміст урану (33 тератонни) та торію (143 тератонни) у надрах Землі. Розпад урану продукує 94 мкВт/кг, а торію 26 мкВт/кг. Обчисліть, яка частка енергії походить саме з радіоактивного розпаду цих елементів, якщо повний потік енергії, що її виділяє Земля, дорівнює 87 мВт/м². Який висновок можна зробити про основне джерело енергії у надрах Землі?

Розв'язок:

Повну потужність, що виділяє Земля W отримаємо помноживши повну площу поверхні Землі S на тепловий потік з одного квадратного метра q :

$$W = qS = 4\pi R^2 q = 4 \cdot 3,14 \cdot 6,4^2 \cdot 10^{12} \cdot 87 \cdot 10^{-3} = 44 \cdot 10^{12} \text{ Вт.} \quad (5 \text{ балів})$$

З того $W_U = M_U \cdot Q_U$ виділяється при розпаді урану, а $W_{Th} = M_{Th} \cdot Q_{Th}$ – при розпаді торію, де M – маса, а Q – потужність енерговиділення на кілограм маси відповідного

елементу:
$$W_U = 33 \cdot 10^{15} \cdot 94 \cdot 10^{-6} = 3,1 \cdot 10^{12} \text{ Вт,} \quad (3 \text{ бали})$$

$$W_{Th} = 143 \cdot 10^{15} \cdot 26 \cdot 10^{-6} = 3,7 \cdot 10^{12} \text{ Вт,} \quad (3 \text{ бали})$$

що в сумі дає:
$$W_{U+Th} = 6,8 \cdot 10^{12} \text{ Вт,} \quad (2 \text{ бали})$$

або приблизно 15% від повного енерговиділення Землі. Отже основний потік енергії має інше джерело – гравітаційну диференціацію. (2 бали)

5. Танок планет (Грицай А.) 10 балів

Навколо зорі в одній площині коловими орбітами рухаються дві планети. Модулі швидкостей руху планет відносно зорі відрізняються на 8.0 км/с, період обертання першої становить 7.0 земних років, а радіус орбіти другої 3.5 а.о. Знайдіть масу зорі, а також мінімальну і максимальну відстані між планетами.

Розв'язок

Різниця швидкостей планет при русі по колах, виражена через великі півосі (радіуси) орбіт a й періоди обертання T становить

$$\Delta v = 2\pi \left(\frac{a_1}{T_1} - \frac{a_2}{T_2} \right).$$

До чисельних розрахунків ми можемо припускати це значення як додатним, так і від'ємним, оскільки не вказано, для якої планети швидкість вища. За третім законом Кеплера:

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2}.$$

Тому

$$T_2 = T_1 \frac{a_2^{3/2}}{a_1^{3/2}} \quad (1 \text{ бал} - \text{коректне застосування III закону Кеплера})$$

Відносно півосі першої планети дістали рівняння:

$$\Delta v = \frac{2\pi}{T_1} \left(a_1 - \frac{a_1^{3/2}}{a_2^{1/2}} \right).$$

Дане рівняння відносно $\sqrt{a_1}$ є кубічним. Приведемо його до вигляду:

$$\frac{a_1^{3/2}}{a_2^{1/2}} - a_1 + \frac{\Delta v T_1}{2\pi} = 0. \quad (2.5 \text{ бали} - \text{рівняння відносно однієї з невідомих})$$

Обчислення зручно (але не обов'язково) проводити в астрономічних одиницях, тому запишемо швидкість у формі:

$$\Delta v = \frac{-8.0 \frac{\text{км}}{\text{с}} \cdot 3.156 \cdot 10^7 \frac{\text{с}}{\text{рік}}}{1.496 \cdot 10^8 \frac{\text{км}}{\text{а.о.}}} = -1.688 \frac{\text{а.о.}}{\text{рік}};$$

спершу розглядаємо випадок, коли перша планета повільніша. До рівняння входить

$$\frac{\Delta v T_1}{2\pi} = -1.881 \text{ а.о.}$$

При старшому степені наявний коефіцієнт:

$$\frac{1}{a_2^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{3.5}} = 0.535.$$

Отже, приходимо до:

$$0.535a_1^{3/2} - a_1 - 1.881 = 0, \text{ (1.5 бали – рівняння в чисельному вигляді)}$$

відстань виражена в астрономічних одиницях.

Корінь можна знайти методом послідовних наближень, розглядаючи

$$a_1 = \left(\frac{a_1 + 1.881}{0.535} \right)^{2/3}.$$

При початковому виборі

$$a_1 = 4$$

(що є не дуже оптимальним) знаходимо набір значень:

$$a_1 = 4.944; 5.460; 5.731; 5.872; 5.944; 5.981; 6.000; 6.009; 6.014; 6.016; 6.017\dots$$

Результат збігається до

$$a_1 = 6.02 \text{ а.о.}; \text{ (2 бали – розв'язок рівняння)}$$

у фінальних виразах доцільно буде обмежуватися двома значущими цифрами, як в умові.

Відстань між планетами при їх русі по колах в одній площині змінюється в межах:

$$l \in [a_1 - a_2; a_1 + a_2] \text{ чи}$$

$$l \in [2.5 \text{ а.о.}; 9.5 \text{ а.о.}].$$

Також маємо все необхідне, щоб обчислити масу зорі:

$$M = \frac{4\pi^2 a_1^3}{GT_1^2} = \frac{4 \cdot 9.87 \cdot (6.02 \cdot 1.496)^3 \cdot 10^{33} \text{ м}^3}{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2} \cdot 49 \cdot 3.156^2 \cdot 10^{14} \text{ с}^2} = 8.86 \cdot 10^{30} \text{ кг}.$$

Цей результат відповідає приблизно 4.5 сонячним масам. (2 бали – числові значення для відстані й маси)

Вкажемо, що різницю швидкостей можна брати з протилежним знаком, після чого виникає рівняння

$$0.535a_1^{3/2} - a_1 + 1.881 = 0.$$

Екстремум функції в лівій частині (а саме, локальний мінімум, що бачимо, наприклад, із другої похідної) реалізується при

$$1.5 \cdot 0.535a_1^{1/2} - 1 = 0.$$

Це дає

$$a_1^{1/2} = \frac{1}{1.5 \cdot 0.535} \approx 1.25.$$

За такого результату ліва частина досліджуваного рівняння напевне більша нуля, тому альтернативного розв'язку немає. (1 бал – відсутність другого розв'язку)

Відповідь

Відстань між планетами: $l \in [2.5 \text{ а.о.}; 9.5 \text{ а.о.}].$

Маса зорі: $M = 4.5M_{\odot}.$