Задачі 1 етапу Всеукраїнської Інтернет-олімпіади з астрономії
11 клас
25 листопада – 1 грудня 2024 року

1. **Куди летимо?** (Решетник В.) 5 балів

За допомогою радіолокатора проводиться дослідження навколоземного астероїда. Локатор працює на довжині хвилі 3.5249 см. Відбитий сигнал прийнято на частоті 8505.25 МГц. Обчисліть, із якою швидкістю рухається астероїд вздовж променя зору. Наближається чи віддаляється цей астероїд?

Розв'язок

Частота локатора 8504.99 МГц, отже різниця в частотах -258 кГц.

Хвиля падає на тіло, що рухається, тому зазнає зміщення внаслідок ефекту Доплера. Відбита хвиля також зазнає зсуву внаслідок ефекту Доплера.

Отже спостережувана частота буде зсунута $\Delta f = f\frac{2V}{c}$, звідки швидкість руху астероїда складає -4.5 км/с, оскільки зміщення в сторону збільшення частот, то астероїд наближається до Землі.

2. **Транзит двох планет** (Марсакова В.) 10 балів

У деякої зорі є дві екзопланети. Транзити одної з них по диску зорі повторюються з періодом 8 діб та спричиняють падіння блиску 0.0112^m. Для другої ці величини: 11 діб та 0.0077^m. Знайдіть а) відношення радіусів планет до радіуса зорі та б) падіння блиску від їх одночасного транзиту, вважаючи, що планети у проєкції не накладаються одна на одну. Потемнінням диску зорі до краю знехтувати. в) Через який час будуть повторюватись такі одночасні транзити?

Розв'язання:

а) Запишемо відношення освітленностей від зорі з планетою на диску та без неї через формулу Погсона:

$$\frac{L\left(1-\left(\frac{r_1}{r_*}\right)^2\right)}{L} = 10^{-0.4\Delta m_1}$$

Звідси знаходимо $\frac{r_1}{r_*} = 0.101$. Аналогічно для другої зорі $\frac{r_2}{r_*} = 0.084$.

б) Падіння блиску під час одночасного транзиту знайдемо теж з формули Погсона:

$$\Delta m_{12} = 2.5\lg\left(1-\left(\frac{r_1}{r_*}\right)^2-\left(\frac{r_2}{r_*}\right)^2\right) = 0.0190^m$$

в) Повторюватись ці події будуть через найменше спільне кратне 8 та 11, тобто кожні 88 діб.

3. **В гравітаційних обіймах екзосонця** (Шевчук О.) 15 балів

Навколо деякої зорі – екзосонця – масою 2.35 мас Сонця рухається планета. Відомо, що відношення різниці в тривалості істинної екзосонячної та зоряної (сидеричної) діб в перицентрі орбіти планети до різниці в тривалості істинної

екзосонячної та зоряної (сидеричної) діб в апоцентрі дорівнює 6.31. Відстань від планети до екзосонця в перицентрі – 0.25 а. о. Знайдіть:
1) сидеричний період орбітального руху планети в одиницях земного сидеричного року;
2) на скільки зоряних величин відрізняється блиск екзосонця при спостереженнях з поверхні планети в апоцентрі та перицентрі її орбіти?
Вважати, що світність зорі не змінюється. Кутова швидкість добового обертання планети відносно далеких зір є сталою і набагато більшою за миттєву кутову швидкість орбітального руху в тій же системі відліку.

Розв'язання

Запишемо наслідок з II закону Кеплера для двох однакових нескінченно малих проміжків часу в моменти, коли планета знаходиться в перицентрі та в апоцентрі своєї орбіти

$$a^2(1 + e)^2 d\varphi_a = a^2(1 - e)^2 d\varphi_n,$$

де a – велика піввісь орбіти, e – її ексцентриситет, $d\varphi_a$ та $d\varphi_n$ – фокальні кути повороту планети на її орбіті в апоцентрі та в перицентрі за час dt.

Звідси слідує, що

$$d\varphi_n/d\varphi_a = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2.$$

З огляду на малі проміжки часу останню рівність подамо у вигляді

$$\varphi_n/\varphi_a = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2, \qquad (*)$$

а вже звідси отримуємо

$$\frac{1+e}{1-e} = \sqrt{\frac{\varphi_п}{\varphi_а}} \qquad (1)$$

Знайдемо фокальні кути повороту планети на орбіті за одну сидеричну добу $T_{доб\ сид}$.

Для перицентру

$$\alpha = \varphi_n \times T_{доб\ сид}, \qquad (2)$$

для апоцентру

$$\beta = \varphi_a \times T_{доб\ сид} \qquad (3)$$

Знаючи кути α та β неважко знайти час (виражений в одиницях сидеричного часу планети) за який планета в своєму добовому обертанні провернеться на кути α та β в системі далеких зір. Відповідно, маємо

$$\Delta T_1 = \alpha \times T_{доб\ сид}/(2\pi), \qquad (4)$$

$$\Delta T_2 = \beta \times T_{доб\ сид}/(2\pi). \qquad (5)$$

В співвідношеннях (4) та (5) ми врахували, що за умовою кутова швидкість добового обертання планети відносно далеких зір є сталою і набагато більшою за миттєву кутову швидкість орбітального руху в тій же системі відліку.

Неважко зрозуміти, що величини ΔT_1 та ΔT_2 визначають різниці в тривалості істинної екзосонячної та зоряної (сидеричної) діб в перицентрі орбіти планети та в її апоцентрі відповідно.

З (2) та (4)

$$\Delta T_1 = \varphi_n \times T^2_{доб\ сид}/(2\pi) \tag{6}$$

З (3) та (5)

$$\Delta T_2 = \varphi_a \times T^2_{доб\ сид}/(2\pi). \tag{7}$$

Маючи вирази (6) та (7) неважко отримати, що

$$\Delta T_1/\Delta T_2 = \varphi_n/\varphi_a. \tag{8}$$

З (*) та (8) маємо

$$\Delta T_1/\Delta T_2 = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2. \tag{9}$$

За умовою

$$\Delta T_1/\Delta T_2 = 6{,}31 \tag{**}$$

Тому, використавши (9) та (**), записуємо

$$\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2 = 6{,}31,$$

Звідси знаходимо

$$e \approx 0{,}43. \tag{***}$$

Знайдемо велику піввісь орбіти планети знаючи її ексцентриситет та відстань від планети до екзосонця в перицентрі

$$r_n = 0{,}25 = a(1-e) = 0{,}57a,$$

$$a \approx 0{,}44 \text{ а. о.} \tag{****}$$

Запишемо III закон Кеплера для систем «Сонце-Земля» та «Екзосонце-планета». Маємо

$$(M_e/M_c) \times (T/1)^2 = (a/1)^3, \tag{10}$$

де M_e – маса екзосонця, M_c – маса Сонця, T – сидеричний період обертання планети навколо екзосонця в одиницях земного сидеричного року.

З умови, (****) та (10)

$$\boldsymbol{T = 0{,}19 \text{ роки}}.$$

Ми отримали відповідь на перше запитання задачі.

Відстань від планети до екзосонця дорівнює в апоцентрі дорівнює $r_a = a(1 + e)$. З (***) та (****)

$$r_a \approx 0{,}63 \text{ а. о.} \qquad (*****)$$

Виходячи з закону освітленості, умови, виразу (*****) та формули Погсона, можемо записати

$$E^*_n/E^*_a = (r_a/r_n)^2 = 2{,}512^{\Delta m},$$

Звідси після логарифмування та елементарних переворень, отримуємо

$$\boldsymbol{\Delta m = 2.}$$

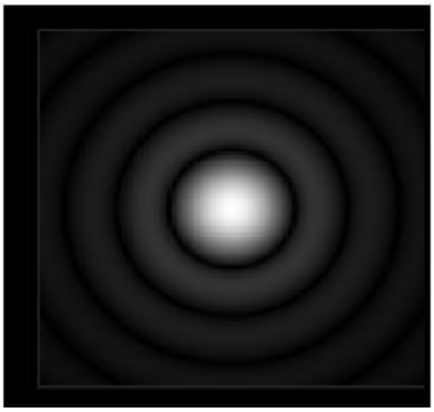
Отримали відповідь на друге – останнє – запитання задачі.

Відповідь: 1) $T = 0{,}19$ роки

2) $\Delta m = 2^{m}$.

4. **Несправжні диски зір** (Шевчук О.) 15 балів

Дифракційна картина, що виникає під час проходження світла через рівномірно освітлений круглий отвір, має яскраву ділянку круглої форми в центрі, відому як диск Ейрі. Загалом дифракційний візерунок включає пляму та концентричні яскраві кільця навколо неї (див. фото). Колись помилково вважали, що диск Ейрі є справжнім диском зір, які астрономи бачили в свої телескопи. Покажіть хибність таких уявлень. Виведіть вираз для різниці видимих болометричних зоряних величин довільних двох зір, виходячи з припущення, що диски Ейрі – справжні диски зір. Вважайте, що зорі випромінюють як абсолютно чорні тіла (АЧТ), а спостереження проводяться на довжинах хвиль, які відповідають максимуму випромінювання АЧТ.



Розв'язання

Запишемо значення кутової величини радіуса диску Ейрі ідеальної центрованої оптичної системи

$$\rho = 1{,}22\frac{\lambda m}{D}, \qquad (1)$$

де λ_m – довжина хвилі, що відповідає максимуму випромінювальної здатності зорі в її наближенні моделлю АЧТ; D – діаметр апертури об'єктиву телескопу. Нехай відстань до зорі l. Тоді, вважаючи, що ρ є видимим кутовим діаметром зорі, отримаємо вираз для її лінійного діаметра

$$D* = \rho l = 1{,}22\frac{\lambda m}{D}l,$$

Звідси для площі поверхні зорі виходить

$$S* = \pi D^2* = \pi(1{,}22\frac{\lambda m}{D}\, l)^2 \qquad (2)$$

За умовою зоря – АЧТ, для якої λ_m – довжина хвилі, що відповідає максимуму випромінювальної здатності. Застосуємо закон Стефана-Больцмана і знайдемо світність L∗ зорі виходячи з виразу (2).

$$L* = \sigma S*T^4 = \sigma \pi(1{,}22\frac{\lambda m}{D}\, l)^2 T^4 = \sigma \pi(1{,}22\frac{\lambda m}{D}\, l)^2\left(\frac{b}{\lambda_m}\right)^4 \ldots\ldots\ldots.(3)$$

Звідси для видимого блиску зорі отримуємо

$$E = L*/\left(4 \pi l^2\right) = \sigma \pi(1{,}22\frac{\lambda m}{D}\, l)^2\left(\frac{b}{\lambda_m}\right)^4/\left(4 \pi l^2\right) = \sigma (0{,}61\frac{b^2}{D\lambda_m})^2 \ldots\ldots\ldots\ldots.(4)$$

З (4) видно, що *блиск зорі не залежить від відстані до неї*, що, очевидно є фізично неймовірною подією. Останнє зауваження і доводить неправомочність гіпотези про те, що диск Ейрі є справжнім диском зорі.

Запишемо вирази (4) для блиску двох зір максимуми випромінювання яких відповідають довжинам хвиль λ_{m1} та λ_{m2} і використаємо формулу Погсона. В результаті після очевидних перетворень будемо мати для різниці видимих зоряних величин цих зір:

$$\mathbf{\Delta m = 5lg(\lambda_{m2}/\lambda_{m1})} \qquad (5)$$

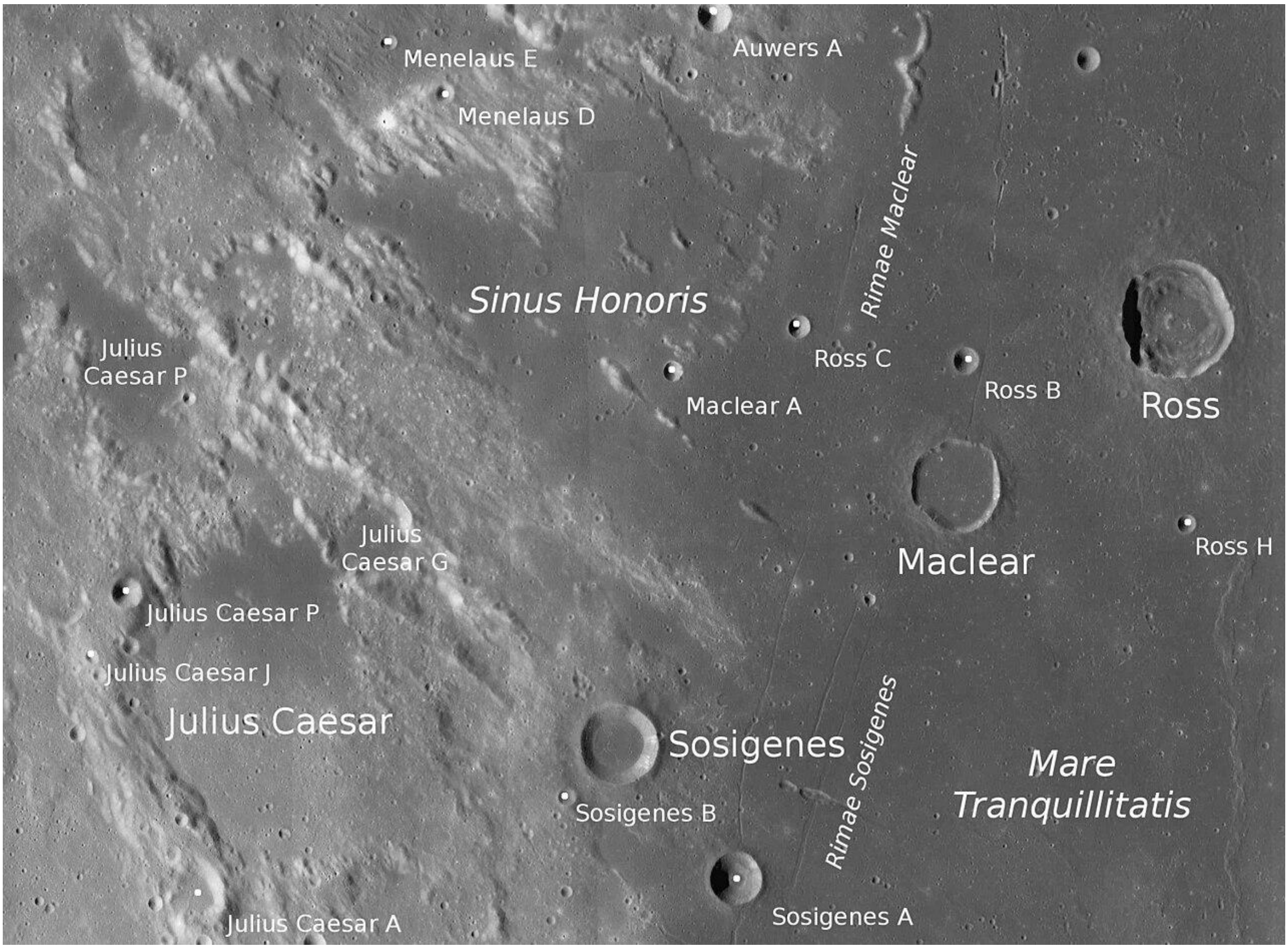
Вираз (5) є шуканим.

Доволі дивне співвідношення для Δm є наслідком все того ж невірного припущення, що диск Ейрі є справжнім диском зорі.

Відповідь: $\Delta m = 5lg(\lambda_{m2}/\lambda_{m1})$.

5. **Термінатор в дії** (Слюсарев І.) 5 балів

Скільки часу буде тривати проходження термінатора через кратер Sosigenes (діаметром 17 км) на Місяці. Селенографічні координати кратера Sosigenes 8.7°N, 17.6°E.



Розв'язок.

Радіус Місяця 1737 км, тому за час синодичного місяця у 29,5 діб термінатор проходить всю поверхню (1 бали).

Кратер поблизу екватора, де швидкість руху термінатора складає:

$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi * 1737}{29.5*24}$=15.4 км/год. (2 бали)

Тому кратер пройде термінатор за 17/15.4=1.1 години. (2 бали)