Задачі 1 етапу Всеукраїнської Інтернет-олімпіади з астрономії
17-25 грудня 2025 року
Старша група (10-11 класи)

1. Де Харон? ***Решетник В.***

Відстань від Харона (радіус R=600 км, альбедо A=0.4) до Плутона (R=1200 км, A=0.5) складає 20 тис. км. Відстань від Сонця до Плутона взяти рівною 35 а.о. Якого діаметру має бути телескоп, щоб можна було теоретично розрізнити карликову планету та її супутник при спостереженні у видимому світлі (середня довжина хвилі 550 нм). Якщо враховувати вплив атмосферної турбулентності в 1″, чи можливо розрізнити Плутон та Харон?

Розв'язок

Знайдемо видиму кутову відстань між Хароном та Плутоном для спостерігача на Землі (в момент протистояння, відстань близько 34 а.о. згідно умов задачі), буде складати 0.8″. Якщо атмосферна турбулентність 1″ (або більше, що характерно для більшості обсерваторій), то зареєструвати Плутон без використання адаптивної оптики дуже складно, чим пояснюється відносно пізнє відкриття Харона (Джеймс Крісті, 1978 рік).

Для отримання такої роздільної здатності телескопу формально треба мати діаметр $D=1.22\lambda/\ \Delta\delta \approx 17$ см. З урахуванням оптичних аберацій та інших ефектів очевидно діаметр має бути дещо більшим.

Але іншим важливим фактором, що обмежує можливість реєстрації є зоряна величина об'єктів. Потрібно розрахувати мінімальний діаметр телескопа, щоб зареєструвати світло від Харона.

Скориставшись даними про альбедо, розміри та відстань до Харону, можна оцінити його блиск, що складає близько $+17^m$ (ці дані також відповідають довідниковій інформації).

Обрахуємо діаметр телескопа, який потрібно для реєстрації об'єктів 16.5^m – 17^m. Діаметр телескопа має бути 0.7 - 0.8 метра, залежно від того який діаметр зіниці брати (6 - 7 мм) та граничну зоряну для неозброєного ока (6^m чи 6.5^m).

Якщо використовувати сучасні малошумні камери з можливістю накопичення, то залежно від астроклімату є можливість зареєструвати Харон в телескоп діаметром близько 30 см. Але візуально в такий телескоп помітити Харон не вдасться (хоча формально роздільна здатність буде краще ніж кутова відстань між Плутоном та Хароном).

Отже вимога до спостереження слабких потоків сильніше за вимогу розділення, і мінімальний діаметр телескопа має бути від 30 до 80 см, залежно від типу камери, чи загалом спостереження неозброєним оком.

2. В дуже далекій галактиці. ***Грицай А.***

В далекій галактиці з червоним зміщенням z=0.04 спалахнула наднова абсолютною зоряною величиною -19^m. Яка видима зоряна величина наднової для земного спостерігача?

Розв'язок

Знайдемо фотометричну відстань з закону Габбла, потім користуючись формулою для зв'язку абсолютної та видимої зоряної величини, оцінимо видиму зоряну величину. Реально блиск буде дещо слабшим, внаслідок поглинання світла в Галактиці, атмосфері та можливо в міжгалактичному середовищі і міжзоряному середовищі материнської галактики.

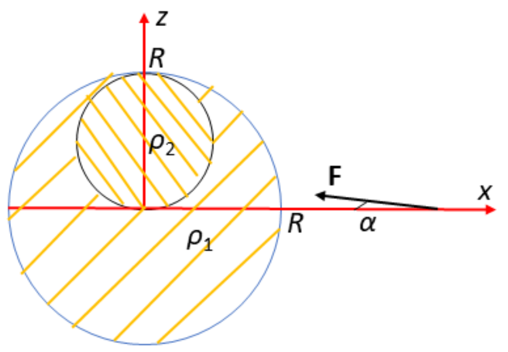
$$M = m + 5 - 5\lg(r) \Rightarrow m = M - 5 + 5\lg(r)$$

$$cz = Hr \Rightarrow r = \frac{cz}{H} = 171 \text{ Мпк}$$

$$m = -19 - 5 + 5\lg(171 \cdot 10^6) \approx 17$$

3. Нецентральна гравітація. ***Грицай А.***

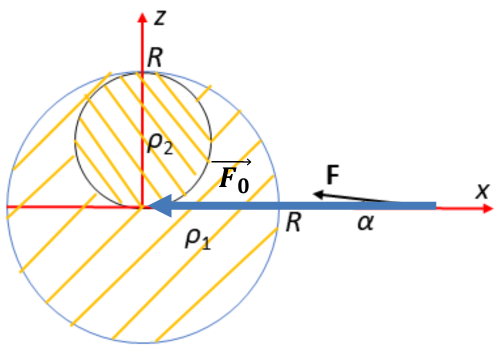
Астероїд складається з двох сферичних частин різної густини відповідно до перерізу, зображеного на рисунку (розподіл маси симетричний відносно осі z):



Виведіть формулу для відношення густин ρ_2/ρ_1, якщо вектор сили тяжіння в заданій точці на осі абсцис відхиляється від напрямку на геометричний центр на кут α. Отримайте числовий результат для випадку $x = 2R$, $\alpha = 1°$. Початок системи координат у геометричному центрі астероїда.

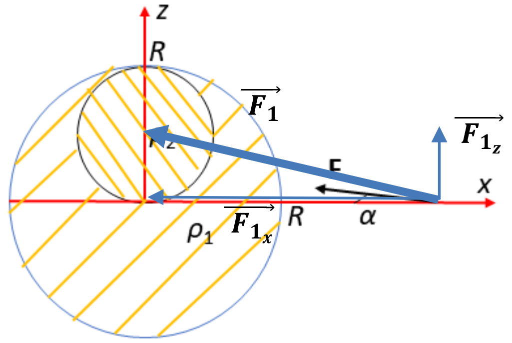
Розв'язок

Задачу розв'язуватимемо методом суперпозиції. Так, одна куля радіусом R буде заповнена густиною ρ_1, а інша радіусом $\frac{R}{2}$ густиною $\rho_2 - \rho_1$.



Сила, що діє на масу m, розміщену на відстані x від центру астероїда, внаслідок взаємодії з кулею радіусом R:

$$F_0 = -F_{0_x} = \frac{Gm\rho_1 \frac{4}{3}\pi R^3}{x^2}$$



Силу взаємодії з меншою кулею розкладемо на компоненти.

$$F_1 = \frac{Gm(\rho_2 - \rho_1)\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3}{\left(x^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2\right)}$$

$$F_{1_x} = -\frac{x}{\sqrt{\left(x^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2\right)}} F_1$$

$$F_{1_z} = \frac{\frac{R}{2}}{\sqrt{\left(x^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2\right)}} F_1 = F_z$$

Тоді x- компонента сили взаємодії з астероїдом:

$$-F_x = \frac{x}{\sqrt{\left(x^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2\right)}} \frac{Gm(\rho_2 - \rho_1)\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3}{\left(x^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2\right)} + \frac{Gm\rho_1\frac{4}{3}\pi R^3}{x^2}$$

Отже, кут α знаходиться з такого співвідношення:

$$tg(\alpha) = \left|\frac{F_z}{F_x}\right| = \frac{\frac{\rho_2 - \rho_1}{6}\frac{\frac{R}{2}}{\left(x^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{\rho_2 - \rho_1}{6}\frac{x}{\left(x^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\rho_1 4}{3x^2}} = \frac{1}{\frac{2x}{R} + \frac{16\left(x^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x^2 R\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right)}}$$

Звідси отримуємо вираз для шуканого відношення:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 + \frac{16\left(x^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x^2 R\left(\frac{1}{tg(\alpha)} - \frac{2x}{R}\right)}$$

При $x = 2R$:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 + \frac{16\left(4 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{4\left(\frac{1}{tg(\alpha)} - 4\right)} \approx 1.66$$

4. **Куди прямує комета? *Шевчук О.***

Спостереження за кометою дозволили в деякий момент часу отримати наступні відомості: горизонтальний паралакс – 57.8″; екліптична широта 58°17′; власний рух за екліптичною довготою 68 кутових секунд за хвилину, а за екліптичною широтою – 27 кутових секунд за хвилину; спектральна лінія Lyα зазнала фіолетового зміщення 11.91 пм. Коли слід очікувати наступне повернення комети до Сонця?

Вважайте, що 1 а. о. = 149.6 млн км; радіус Землі – 6370 км; швидкість світла у вакуумі – $3.00 \cdot 10^5$ км/с; лабораторна довжина хвилі Lyα дорівнює 121.6 нм.

Розв'язок

1) Знайдемо відстань до комети

$$L = 206265 \times R_З / p'',$$

$R_З$ – радіус Землі; p'' – горизонтальний паралакс ядра комети.

Обчислення дають

$$L \approx 2.2736 \times 10^7 \text{ км}$$

/поки залишаємо надлишкову точність для остаточного заокруглення в кінці розв'язку/.

2) Обчислимо сагітальну, тангенційну абсолютні та променеву компоненти швидкості комети. Маємо

$$v_\beta = L\mu_\beta \approx 2.2736 \times 10^7 \times 27/(60 \times 206265) \approx 49.6 \text{ км/с};$$

$$v_\lambda = L\mu_\lambda \times \cos\beta \approx 2.2736 \times 10^7 \times 68 \times \cos 58°17'/(60 \times 206265) \approx 65.68 \text{ км/с};$$

$$v_r = \Delta\lambda \times c/\lambda_o = 11.91 \times 10^{-12} \times 3 \times 10^5/121.6 \times 10^{-9} \approx 29.39 \text{ км/с}.$$

3) Знайдемо повну просторову швидкість комети

$$v = (v_\beta^2 + v_\lambda^2 + v_r^2)^{1/2} \approx 87.40 \text{ км/с}.$$

4) Обчислимо значення другої космічної швидкості на геліоцентричних відстанях $149.6 \times 10^6 \pm 2.2736 \times 10^7$, тобто на максимальній та мінімальній можливих відстанях комети від Сонця, знаючи, що маса Сонця дорівнює 1.99×10^{30} кг. Отримуємо:

$$39.25 < v_{II} < 45.74 \text{ км/с}.$$

Водночас, орбітальна швидкість Землі дорівнює ≈ 29.79 км/с, тому, навіть при зустрічному русі Землі та комети відносна швидкість не перевищила б значення $45.74 + 29.79 = 75.53$ *(км/с)*, що менше за обраховану в п. 3) повну просторову швидкість комети (*87.40* км/с.). Фактично це означає, що комета рухається з гіперболічною геліоцентричною швидкістю, а отже ***ніколи*** вже не повернеться в околиці Землі.

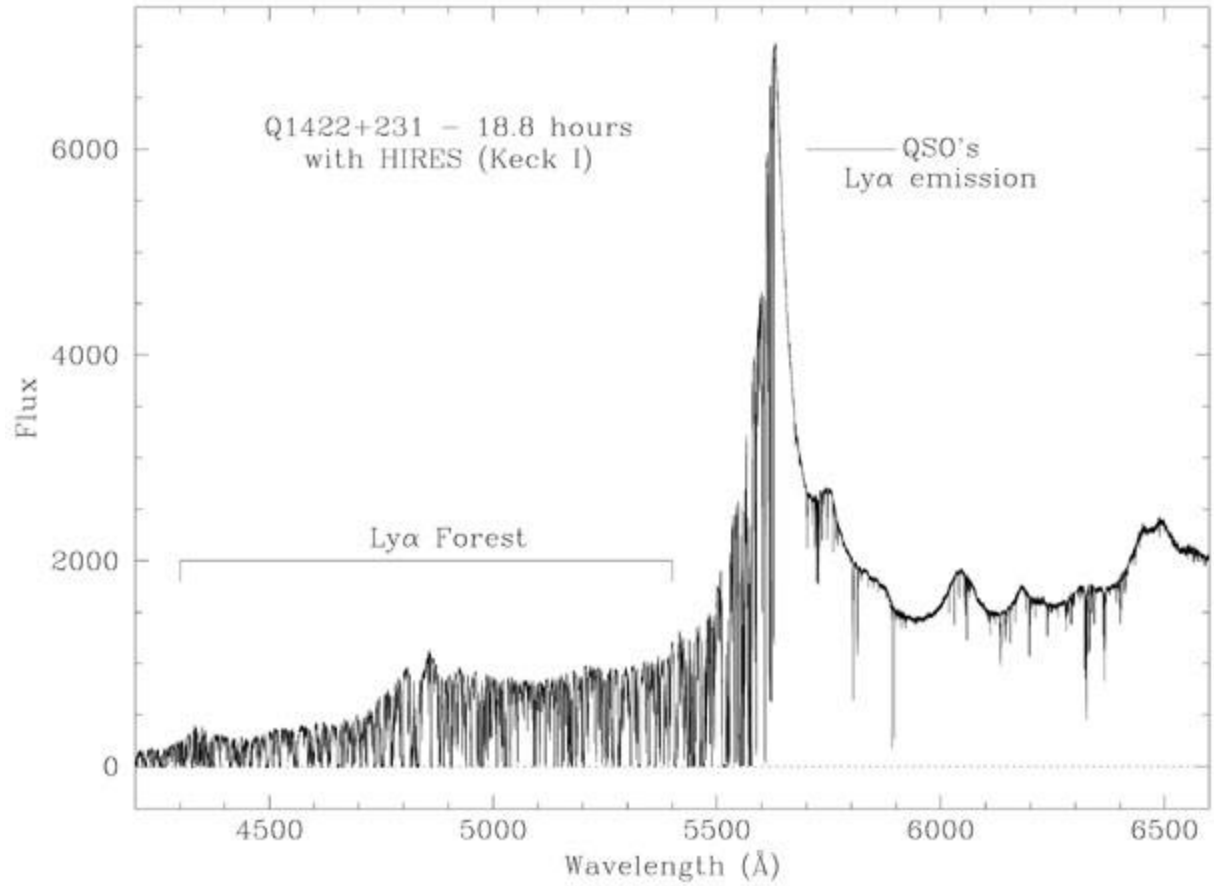
Відповідь: ніколи.

5. Ліс Лайман-альфа. ***Зазубик Д.***

Спектр далекого квазара містить численні лінії поглинання (ліс Лайман-альфа), викликані хмарами нейтрального гідрогену, що лежать на промені зору. Лінія Lyα відповідає резонансному переходу з n =2 енергетичного рівня на основний рівень $n = 1$.

a. Чому ми бачимо "ліс" ліній, а не одну суцільну смугу поглинання?

b. Спектр такого квазара з лінією Lyα зображено нижче. Визначте з наведеного графіка, на якій довжині хвилі спостерігається лінія Lyα від квазара.



c. Користуючись моделлю атома Бора, знайдіть, яке червоне зміщення відповідає цьому квазару. Не використовуйте табличні значення довжин хвиль.

Вказівка: у моделі атома Бора електрони можна уявляти такими, які стаціонарно обертаються по колових орбітах навколо ядра під дією кулонівських сил. При цьому існує дискретизація енергетичних рівнів внаслідок дискретності моменту імпульсу: $L = n\hbar$, де $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ – редукована стала Планка, $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – стала Планка.

Розв'язок

a. Вздовж променя зору розташовані хмари нейтрального гідрогену, у яких і відбувається поглинання (резонансні переходи в основному), тому бачимо лінії поглинання на лабораторній довжині хвилі, яка відповідає переходу на $n = 1$. Внаслідок того, що хмари нейтрального гідрогену розташовані на різних відстанях від спостерігача, червоне зміщення різне. Тобто якщо лабораторна довжина хвилі λ_0, ми бачитимемо лінію поглинання на довжині хвилі $\lambda_0(1+z)$, де z – червоне зміщення хмари газу. Для різних хмар z – різне, тому бачимо набір ліній. 3 бали

b. З графіка визначаємо $\lambda \approx 5630$ Å 1 бал (5600-5650)

c. $L = n\hbar = mvr \Rightarrow v = \frac{n\hbar}{rm}$ 1 бал

Вважаємо рух таким, що відбувається по коловій орбіті.

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{ke^2}{r^2} = \frac{n^2\hbar^2}{mr^3} \Rightarrow r = \frac{n^2\hbar^2}{mke^2} \text{ 1 бал}$$

$$v = \frac{n\hbar}{m}\frac{mke^2}{n^2\hbar^2} = \frac{ke^2}{n\hbar} \text{ 1 бал}$$

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{ke^2}{r} = -\frac{1}{n^2}\frac{m}{2}\left(\frac{ke^2}{\hbar}\right)^2 \text{ 1 бал}$$

Різниця енергій, що відповідає лінії $Ly\alpha$:

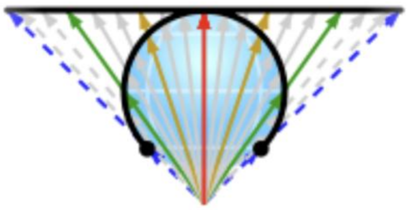
$$\Delta E = \frac{m}{2}\left(\frac{ke^2}{\hbar}\right)^2\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{3m}{8}\left(\frac{ke^2}{\hbar}\right)^2 = \frac{hc}{\lambda_0} \Rightarrow \lambda_0 = \frac{hc}{\frac{3m}{8}\left(\frac{ke^2}{\hbar}\right)^2} = 1224 \text{ Å} \text{ 1 б}$$

Таким чином, $z = \frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0} = 3.59$ 1 бал

6. Таємниці проєкцій. ***Зазубик Д.***

У астрономії та картографії для зображення сфери використовують різні типи проєкцій. Однією із найбільш популярних типів проєкції є азимутальна проєкція, а саме у астрономії – стереографічна. Нею також зображують площину комплексних чисел, так звана сфера Рімана.
У азимутальній проєкції паралелі є концентричними колами, а меридіани – їх радіусами, що розходяться із центру карти під кутами, рівними різниці довгот. Таким чином, кути, визначені з центру карти, збігаються з кутами між великими колами сфери.
У цій задачі пропонується детальніше дослідити гномонічну, стереографічну та проєкції Кларка, Джеймса та де ла Іра.
Їх одержують проєктуванням точок сфери з деякої точки на площину, яка дотикається до північного полюсу/зеніту чи іншої цікавої точки. Точка, з якої проєктують (точка проєктування), вибирається на різній відстані від площини.

Так, проєкція називається гномонічною, якщо точка проєктування у центрі сфери ($d = R$); стереографічною, якщо у іншому полюсі сфери/надирі ($d = 2R$). Для проєкцій Кларка, Джеймса та де ла Іра відстань від точки проєктування до центральної точки, яка відповідає центру карти, становить $d = 2.4\ R$, $d = 2.5\ R$ та $d = \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) R$, відповідно.



a. Для усіх згаданих проєкцій, знайдіть залежність радіуса кола, яке отримується при проєкції кіл сфери, що відповідають колам сталої північної широти (або висоти у горизонтальній системі координат чи схилення в екваторіальній системі координат) 90°, 60°, 45°, 30° та 0° у радіусах сфери. 4 б
b. Нарисуйте отримані кола у масштабі на поданому графіку. Зауважте, подане коло відповідає значенню 30°. Для побудови використовуйте Рис.6.1. 2 б
c. У цьому та наступному завданні використовуйте отримані результати для стереографічної проєкції.
Навколополярні зорі – зорі, які мають такі схилення, що ніколи не заходять. Навколополярне коло – коло схилень, яке відповідає граничному випадку розташування навколополярних зір. Знайдіть схилення таких зір для широти $\varphi = 50°$. 1 б
d. Нехай центральна точка (центр карти) відповідає точці зеніту. Нарисуйте на карті навколополярне коло. Для побудови використовуйте Рис.6.2. Зауважте, що на карті позначено коло, що відповідає висоті 0°, а також показані точки півночі та півдня. 3 б

Рис.6.1

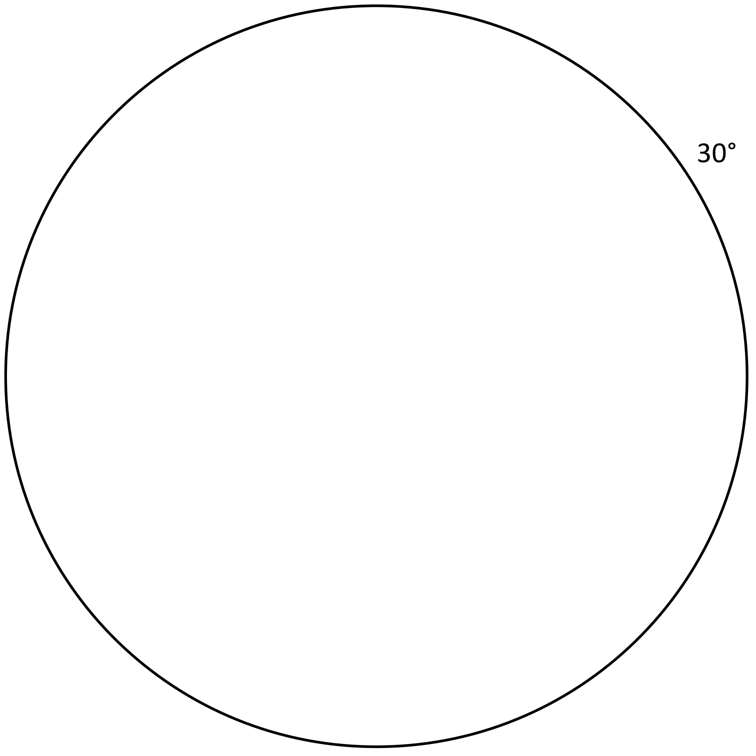
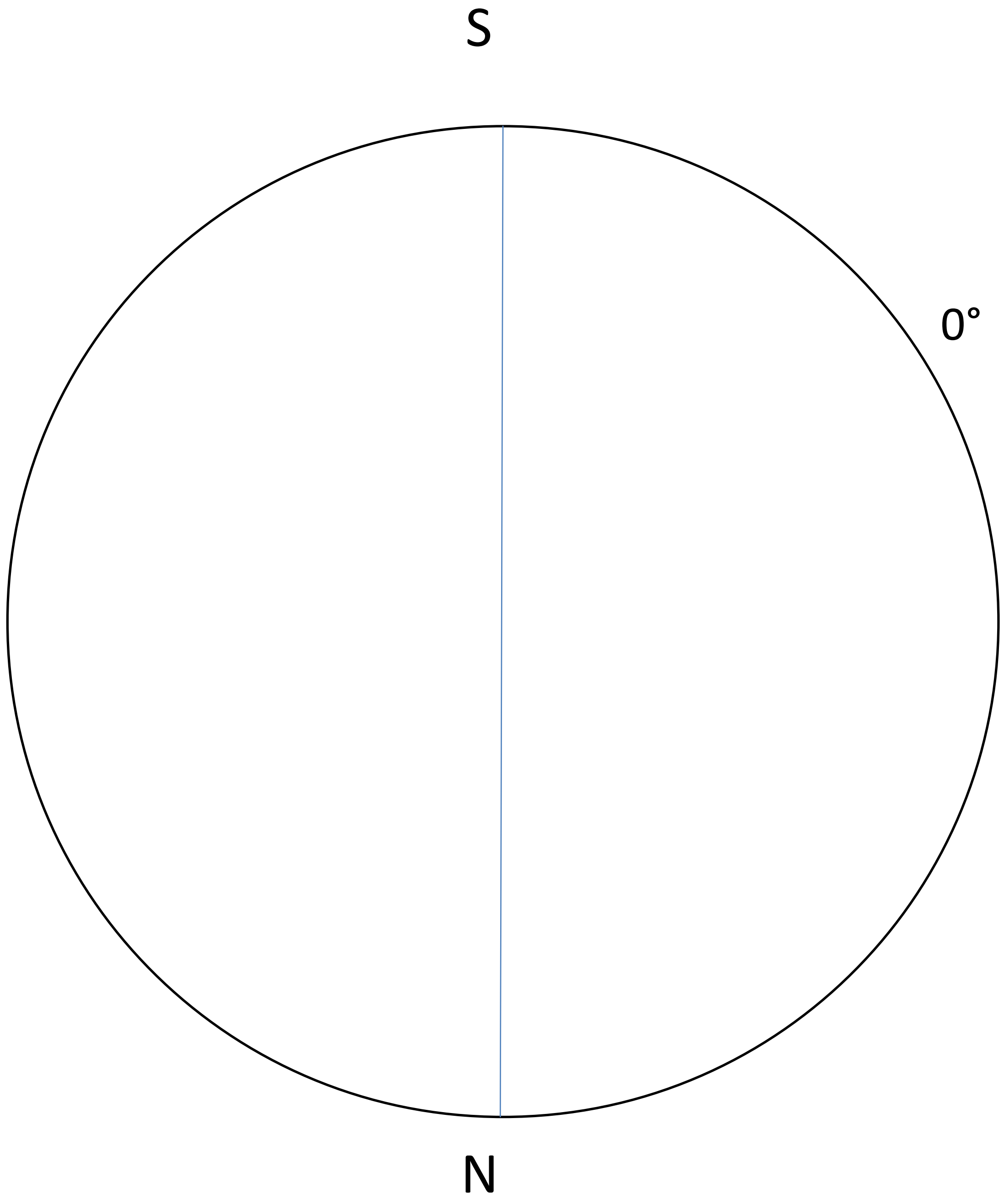
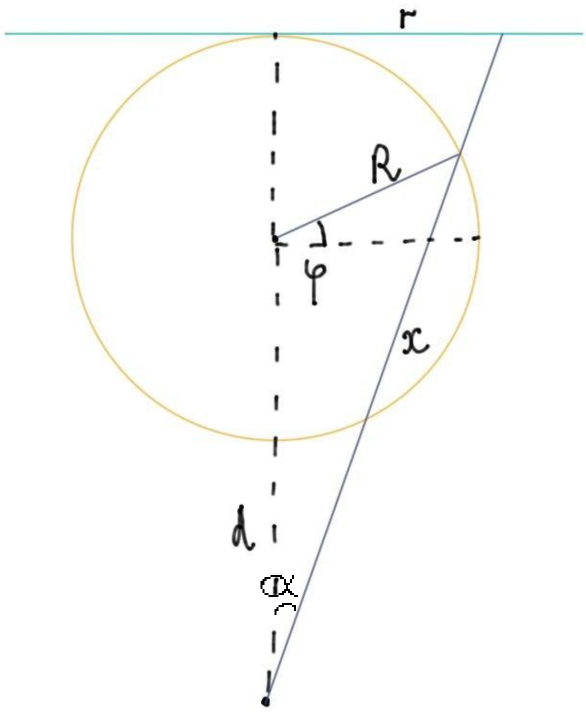


Рис.6.2



Розв’язок



З рисунка: $\frac{\sin(\alpha)}{R} = \frac{\sin(90°+\varphi)}{x} = \frac{\cos(\varphi)}{x} \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{R}{x}\cos(\varphi)$

$$x^2 = (d-R)^2 + R^2 - 2R(d-R)\cos(90° + \varphi)$$
$$= (d-R)^2 + R^2 + 2R(d-R)\sin(\varphi)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{Rcos(\varphi)}{\sqrt{(d-R)^2 + R^2 + 2R(d-R)\sin(\varphi)}}$$

$$tg(\alpha) = \frac{r}{d} \Rightarrow r = dtg(\alpha)$$

Отже, маємо:

$$r = d\frac{Rcos(\varphi)}{\sqrt{(d-R)^2 + R^2\sin^2\varphi + 2R(d-R)\sin(\varphi)}} = \frac{dRcos(\varphi)}{|(d-R) + Rsin(\varphi)|}$$

Гномонічна	$d = R$	$r = \frac{Rcos(\varphi)}{\sin(\varphi)} = Rctg(\varphi)$
Стереографічна	$d = 2R$	$r = \frac{2Rcos(\varphi)}{1+\sin(\varphi)}$

Кларка	$d = 2.4R$	$r = \frac{2.4Rcos(\varphi)}{1.4 + \sin(\varphi)}$
Джеймса	$d = 2.5R$	$r = \frac{2.5Rcos(\varphi)}{1.5 + \sin(\varphi)}$
Де ла Іра	$d = \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)R$	$r = \frac{(2 + \frac{1}{\sqrt{2}})\ Rcos(\varphi)}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin(\varphi)}$

	Гномонічна	Стереографічна	Кларка	Джеймса	Де ла Іра
90°	0	0	0	0	0
60°	$\frac{R}{\sqrt{3}}$	$\frac{R}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}$	$\frac{1.2R}{1.4 + \frac{\sqrt{3}}{2}}$	$\frac{2.5R}{3 + \sqrt{3}}$	$\frac{2 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} \frac{R}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}}$
45°	R	$\frac{R2\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$	$\frac{2.4R\sqrt{2}}{2.8 + \sqrt{2}}$	$\frac{R2.5\sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}}$	$R\frac{2\sqrt{2} + 1}{2 + 2\sqrt{2}}$
30°	$R\sqrt{3}$	$\frac{2R}{\sqrt{3}}$	$\frac{12}{19}R\sqrt{3}$	$\frac{5}{8}R\sqrt{3}$	$\frac{\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)R\sqrt{3}}{3 + \sqrt{2}}$
0°	∞	$2R$	$\frac{12}{7}R$	$\frac{5}{3}R$	$R\left(1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$

Для побудови відносних кіл, ділимо обчислене значення на рядок 30°.

	Гномонічна	Стереографічна	Кларка	Джеймса	Де ла Іра
90°	0	0	0	0	0
60°	0.33	0.46	0.48	0.49	0.50
45°	0.58	0.72	0.74	0.74	0.75
0°	∞	1.73	1.57	1.54	1.49

$$h_{н} = 0 \Rightarrow \varphi + \delta - 90^\circ = 0 \Rightarrow \delta = 90^\circ - \varphi = 40^\circ$$

Отже, це 50° навколо точки з $h = 50^\circ, A = 0^\circ$ - (азимут з півночі)

З формули для стереографічної проекції:

$$r = r(0)\frac{\cos{(h)}}{1+\sin{(h)}}$$

Зі сферичних трикутників:

$$\frac{\cos(h)}{\sin(\tau)} = -\frac{\cos(\varphi)}{\sin(A)} \Rightarrow \cos(h) = -\frac{\sin(\tau)\cos(\varphi)}{\sin(A)}$$

$$\sin(h) = \cos(\varphi)\sin(\varphi)\,(1+\cos(\tau))$$

Для точок, що лежать на навколополярному колі.

$$\cos(\varphi) = \sin(\varphi)\sin(h) + \cos(\varphi)\cos(h)\cos(A)$$

$$1 = tg(\varphi)\sin(h) + \cos(h)\cos(A)$$

$$(1 - tg(\varphi)\sin(h))^2 = \cos^2(A)\,(1-\sin^2(h)) \Rightarrow$$

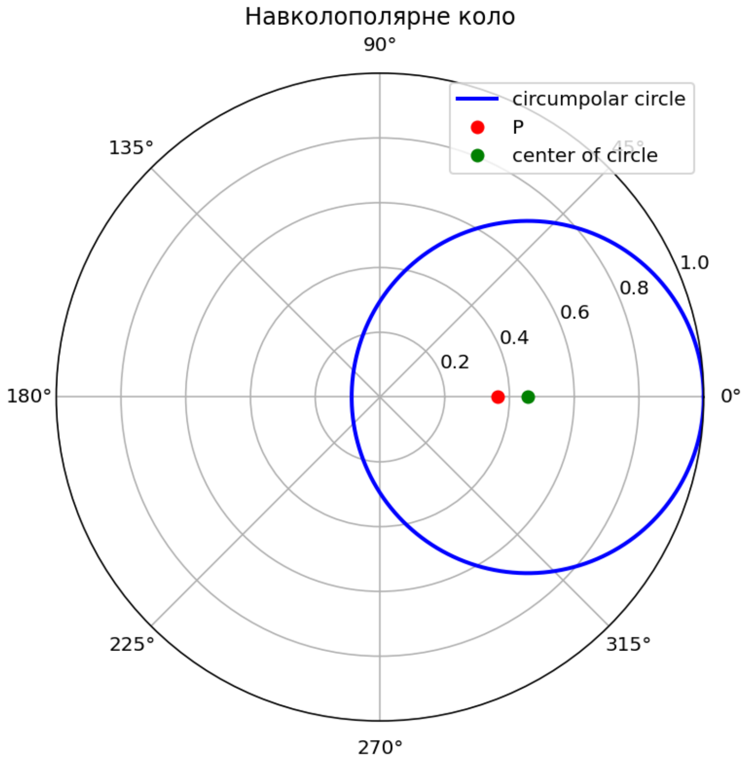
$$\Rightarrow \sin(h) = \frac{tg(\varphi) \pm \cos(A)\sqrt{tg^2(\varphi) - \sin^2(A)}}{tg^2(\varphi) + \cos^2(A)}$$

При $A = 0,\ \mathrm{h} = 0^\circ \Rightarrow$ підходить від'ємний корінь.

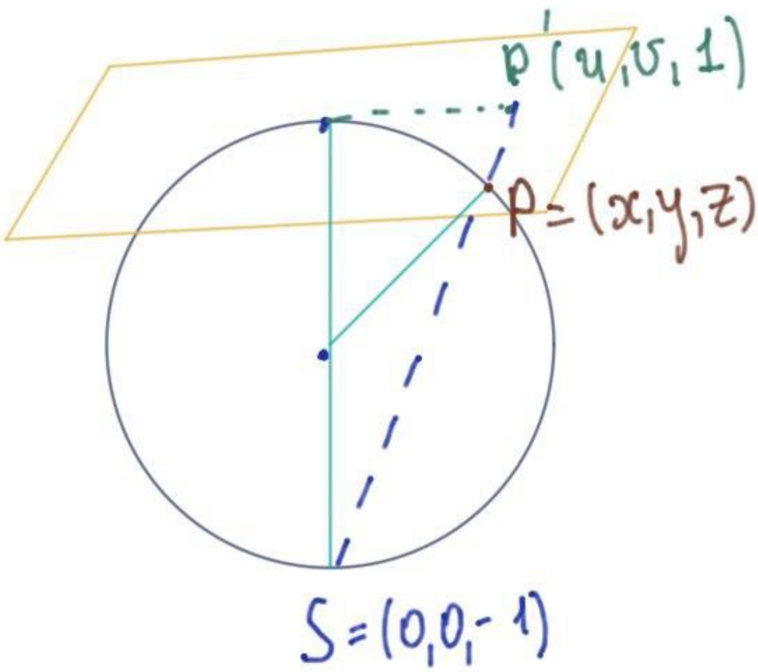
$$\sin(h) = \frac{tg(\varphi) - \cos(A)\sqrt{tg^2(\varphi) - \sin^2(A)}}{tg^2(\varphi) + \cos^2(A)}$$

Звідси знаходимо h і підставляємо у:

$$r = \frac{r(0)\cos(h)}{1+\sin(h)}$$



Цікаво, що у таких проекціях коло на сфері залишається колом при проектуванні, але центр не збігається з точкою полюса. Це можна довести строго.



Нехай на сфері деяка точка має координати $P(x, y, z)$, точка S- точка проектування має координати: $S = (0,0,-1)$. Нехай точка P проектується у точку $P' = (u, v, 1)$ на площині. Проведемо пряму через точки SPP'. Тоді рівняння прямої у параметричному вигляді можна записати так:

$$\begin{cases} x = tu \\ y = tv \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

Тут t — параметр. Тоді оскільки точка $P \in$ сфері, то:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow t^2u^2 + t^2v^2 + (-1 + 2t)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2(u^2 + v^2 + 4) - 4t = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ або } u^2 + v^2 + 4 = \frac{4}{t} \Rightarrow t = \frac{4}{u^2 + v^2 + 4}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{4}{u^2 + v^2 + 4}u \\ y = \dfrac{4}{u^2 + v^2 + 4}v \\ z = -1 + \dfrac{8}{u^2 + v^2 + 4} = \dfrac{4 - u^2 - v^2}{u^2 + v^2 + 4} \end{cases}$$

Мале коло на сфері (і велике також) – перетин сфери площиною, тобто точки x, y, z повинні задовольняти рівнянню площини:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$A\frac{4}{u^2 + v^2 + 4}u + B\frac{4}{u^2 + v^2 + 4}v + C\frac{4 - u^2 - v^2}{u^2 + v^2 + 4} + D = 0$$

$$u^2 + v^2 + 4\frac{D + C}{D - C} + \frac{4A}{D - C}u + \frac{4B}{D - C}v = 0$$

$$\left(u + \frac{2A}{D - C}\right)^2 + \left(v + \frac{2B}{D - C}\right)^2 = 4\frac{B^2 + A^2 + C^2 - D^2}{(D - C)^2}$$

Отримуємо рівняння кола.