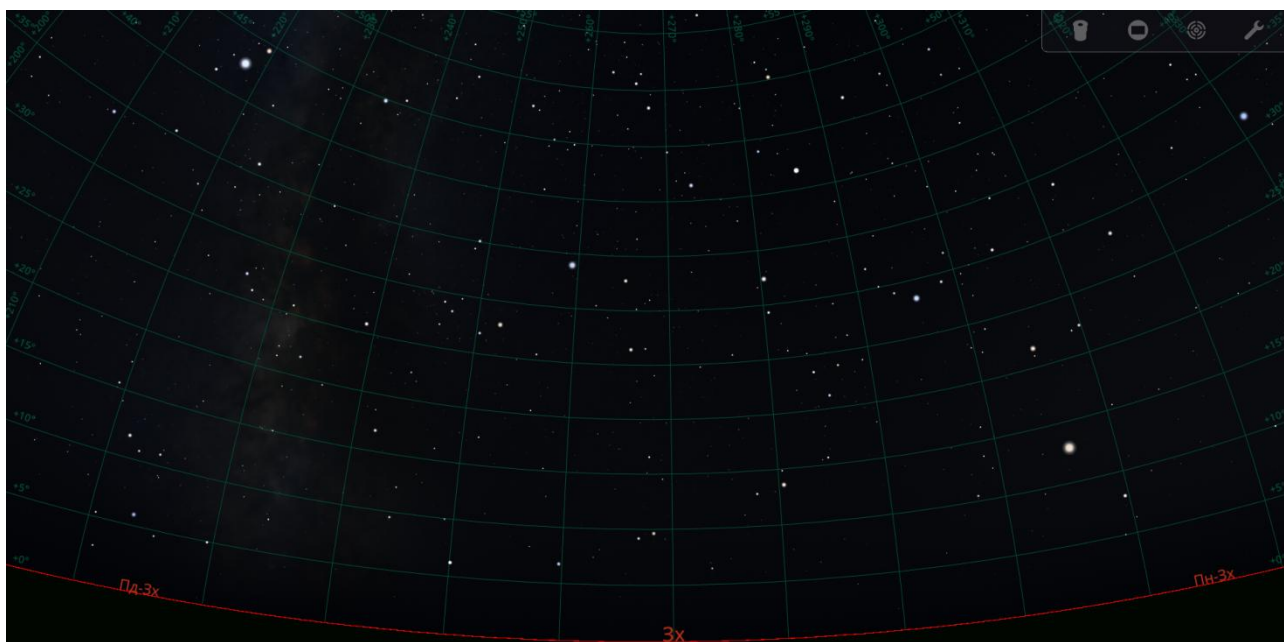
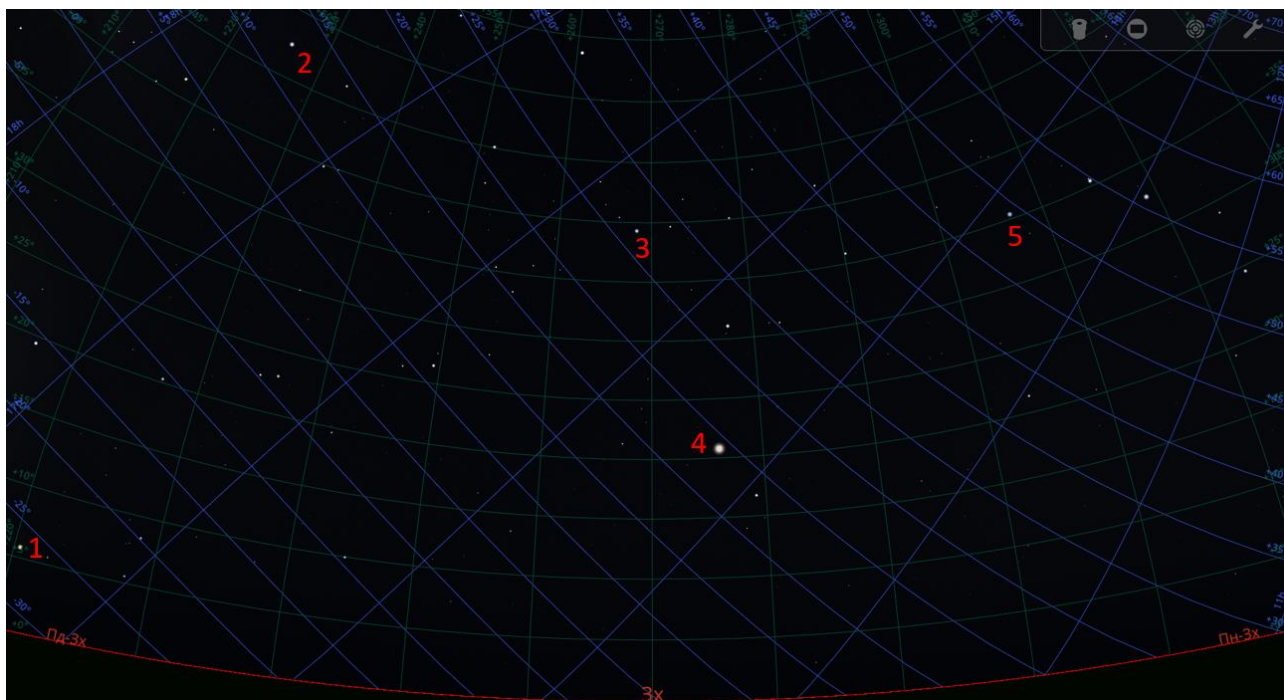


**Завдання та розв'язки всеукраїнської Олімпіади
з астрономії та астрофізики
Практичний тур
16 квітня 2026 року**

1. Мінливе небо (Грицай А.)

Дві мапи нижче показують вигляд зоряного неба в різні роки, але для одного дня року й одного середнього сонячного часу у фіксованій точці спостереження



А) Вкажіть позначення за Басром зір 1-5, використовуючи для сузір'їв стандартні трибуквені скорочення або офіційні українські назви.

Б) Використовуючи першу мапу, визначте координати вказаних зір у другій екваторіальній системі на момент спостереження.

В) Вкажіть принаймні 3 сузір'я (окрім тих, яким належать зорі 1-5), присутні на першій мапі бодай частково.

Г) Які із зір 1-5 містяться на другій мапі?

Ґ) Чи помітні на якійсь із мап яскраві планети? Якщо так – чи можливо їх ототожнити?

Д) Знайдіть широту пункту спостереження.

Е) Вкажіть основну причину, через яку розташування зір відносно горизонту на мапах суттєво відрізняється.

Є) Використовуючи ті із зір 1-5, які є на обох мапах, знайдіть кут на небесній сфері, на який вони змістилися на одній мапі відносно іншої.

Ж) На основі результату попереднього пункту аргументовано оцініть, яка найменша кількість років має розділяти моменти, коли вигляд неба відповідає одній і другій мапі.

З) Котра з мап при виконанні попереднього пункту відповідає більш ранньому моменту часу? Поясніть, чому.

Розв'язок

А) Маємо такі зорі:

1 – α Скорпіона (Sco)

2 – α Змієносця (Oph)

3 – α Північної Корони (CrB)

4 – α Волопаса (Boo)

5 – η Великої Ведмедиці (UMa) (1 бал)

Б) Наведемо в таблиці нижче точні координати на дату спостереження для їх використання при подальших розрахунках. Водночас, щоб мати уявлення про можливі похибки при знаходженні координат за пікселями зображення, в дужках вказані результати, отримані з мапи при вимірюваннях “із середньою уважністю”. Другій екваторіальній системі відповідає синя сітка на мапі 1 (можемо впевнитися, наприклад, у логічному розташуванні небесного екватора й відповідних загальним уявленням координатах яскравих зір)

Зоря	Пряме піднесення	Схилення
α Sco	$16^{\text{h}}31^{\text{m}}$ ($16^{\text{h}}33^{\text{m}}$)	$-26^{\circ}29'$ (-26.3°)
α Oph	$17^{\text{h}}36^{\text{m}}$ ($17^{\text{h}}38^{\text{m}}$)	$+12^{\circ}33'$ ($+12.9^{\circ}$)

α CrB	15 ^h 36 ^m (15 ^h 35 ^m)	+26°38' (+26.6°)
α Boo	14 ^h 17 ^m (14 ^h 15 ^m)	+19°03' (+19.0°)
η UMa	13 ^h 49 ^m (13 ^h 49 ^m)	+49°11' (+49.0°)

Як бачимо, при вимірюваннях отримані відхилення до 2^m за прямим піднесенням та до ~20' за схиленням. Помітно більші розбіжності варто списувати на неакуратність й оцінювати як неповний результат. (2 бали)

В) Із сузір'їв, які “мусять бути” на мапі цієї ділянки неба, відзначимо Змію, Геркулес, Гончі Пси, Волосся Вероніки, Терези. Також частково потрапляють і є правильною відповіддю: Діва, Лев, Дракон і, дещо несподівано, Мала Ведмедиця. (1 бал)

Г) Зорі 2-5 (α Oph, α CrB, α Boo, η UMa) присутні на другій мапі. Не потрапила, відповідно, зоря 1 (α Sco, Антарес). (1 бал)

Г) Ознак наявності яскравих планет на жодній мапі немає. Достатньо проглянути окіл екліптики в лівій нижній її частині. (1 бал)

Д) Зручно скористатись азимутальною сіткою (зелена, ідентифікуємо по розташуванню відносно горизонту й азимуту точок, які відповідають заходу, північному заходу, південному заходу). З'єднаємо дугами великих кіл на небесній сфері точку на горизонті, зеніт і полюс. Із утвореного трикутника:

$$\sin \delta = \cos \varphi \cos A;$$

$$\cos \varphi = \frac{\sin \delta}{\cos A}.$$

Можемо, зокрема, зауважити, що перетин із горизонтом лінії $\delta = 20^\circ$ відхиляється від точки з азимуту $A = 300^\circ$ приблизно так само, як перетин $\delta = 20^\circ$ відносно $A = 270^\circ$. У другому випадку без урахування рефракції має бути перетин трьох ліній (горизонт, небесний екватор, $A = 270^\circ$) в одній точці. Тому хороший результат можна отримати, беручи:

$$\cos \varphi = \frac{\sin 20^\circ}{\cos 300^\circ} = 0.684.$$

Звідси

$$\varphi = +46.8^\circ$$

(із мапи зрозуміло, що зеніт розташований у північній півкулі). Це бачиться прийнятною оцінкою (при побудові мапи була виставлена широта +47.0°). Звичайно, можуть бути використані й кілька значень із усередненням результатів. (3 бали)

Е) З огляду на один час доби, день року й точку спостереження відмінності мають зумовлюватися прецесією за відносно тривалий проміжок часу. (2 бали)

Є) Наведемо азимут і висоту над горизонтом для зір 2-5 на обох мапах (зоря 1 на другій відсутня, а на обох мапах наявна саме азимутальна сітка). Орієнтовний масштаб похибок вимірювання координат вказаний у пункті б).

Зоря	A_1	h_1	A_2	h_2
α Oph	225°54'	47°27'	259°19'	33°57'
α CrB	268°24'	39°19'	295°43'	28°21'
α Boo	276°04'	20°48'	306°08'	12°51'
η UMa	306°52'	35°23'	330°48'	31°32'

Дугу між двома положеннями зорі знаходимо з трикутника, двома вершинами якого є вони, а третьою – зеніт:

$$\cos \psi = \sin h_1 \sin h_2 + \cos h_1 \cos h_2 \cos \Delta A.$$

Отримуємо такі результати:

Зоря	$\cos \psi$	ψ
α Oph	0.880	28.4°
α CrB	0.906	25.0°
α Boo	0.868	29.8°
η UMa	0.938	20.3°

(3 бали)

Ж) Виходимо з того, що в першому наближенні екліптична широта не змінюється, при прецесії йде зсув по екліптичній довготі. Беремо за вершини трикутника два положення зорі й екліптичний полюс і оцінюємо дугу великого кола між цими положеннями з однаковою екліптичною широтою b :

$$\cos \psi = \sin^2 b + \cos^2 b \cos \Delta l ;$$

$$\cos \Delta l = \frac{\cos \psi - \sin^2 b}{\cos^2 b}.$$

Дуги обчислені в попередньому пункті, треба з'ясувати екліптичні широти зір 2-5. Будуємо трикутник “північний полюс світу – північний полюс екліптики – зоря”. Оскільки пряме піднесення північного полюса екліптики становить 18^h , то кут при північному полюсі світу у згаданому трикутнику рівний $270^\circ - \alpha$ (α – пряме піднесення зорі). За сферичною теоремою косинусів:

$$\sin b = \sin \delta \cos \varepsilon + \cos \delta \sin \varepsilon \cos (270^\circ - \alpha), \text{ тобто,}$$

$$\sin b = \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon \sin \alpha .$$

Координати зір у другій екваторіальній системі беремо з першої мапи, використовуємо

$$\varepsilon = 23^\circ 26'.$$

Маємо такі результати:

Зоря	Пряме піднесення	Схилення	$\sin b$	Екліптична широта
α Oph	17 ^h 36 ^m	+12°33'	0.585	35.8°
α CrB	15 ^h 36 ^m	+26°38'	0.699	44.3°
α Boo	14 ^h 17 ^m	+19°03'	0.511	30.7°
η UMa	13 ^h 49 ^m	+49°11'	0.813	54.4°

На основі цих значень знаходимо зсув за екліптичною довготою:

Зоря	$\cos \psi$	$\sin b$	$\cos \Delta l$	Довготний зсув
α Oph	0.880	0.585	0.818	35.1°
α CrB	0.906	0.699	0.816	35.3°
α Boo	0.868	0.511	0.821	34.8°
η UMa	0.938	0.813	0.817	35.2°

Середнє становить

$$\Delta l = 35.1^\circ.$$

Якщо беремо швидкість прецесії 50.3"/рік, то найменша різниця в часі становить

$$\Delta t = \frac{35.1 \cdot 3.6 \cdot 10^3}{50.3} \text{ р.} = 2.51 \cdot 10^3 \text{ р.}$$

Якщо не враховувати Арктур (значення трохи відрізняється від інших; зоря близька й можливий більш суттєвий вплив власного руху, ніж для інших), то

$$\Delta t = \frac{35.2 \cdot 3.6 \cdot 10^3}{50.3} \text{ р.} = 2.52 \cdot 10^3 \text{ р.,}$$

результат змінюється слабо. (Реально часова різниця для мап становила 2538 р.; збіжність залежить від використаного значення швидкості прецесії та потенційних незначних змін параметрів, зокрема, екліптичної широти). (4 бали)

3) При прецесії точки рівнодень і сонцестоянь у заданий момент часу спостерігаються в тому самому напрямку незалежно від року. Оскільки певна точка екліптики від мапи 1 до мапи 2 змістилася від Скорпіона до Стрільця, то це протилежно до руху, наприклад, точки весняного рівнодення. Тому мапа 2 при мінімально можливому інтервалі часу відносно мапи 1 має відповідати більш ранньому положенню. (2 бали)

2. Прозорість атмосфери (Зазубик Д.)

Атмосферна екстинкція – явище, спричинене поглинанням і розсіянням в атмосфері.

Внаслідок атмосферної екстинкції зменшується освітленість від зір при збільшенні зенітного кута. Теорія цього явища наведена нижче.

При проходженні шару з оптичною товщиною τ потік змінюється у відповідності з законом Бугера-Ламберта-Бера

$$I = I^0 e^{-\tau}$$

де I^0 - початковий потік (у даній задачі позаатмосферний). При проходженні шару товщиною s , оптична товщина може бути виражена

$$\tau = \int_0^s k \rho ds$$

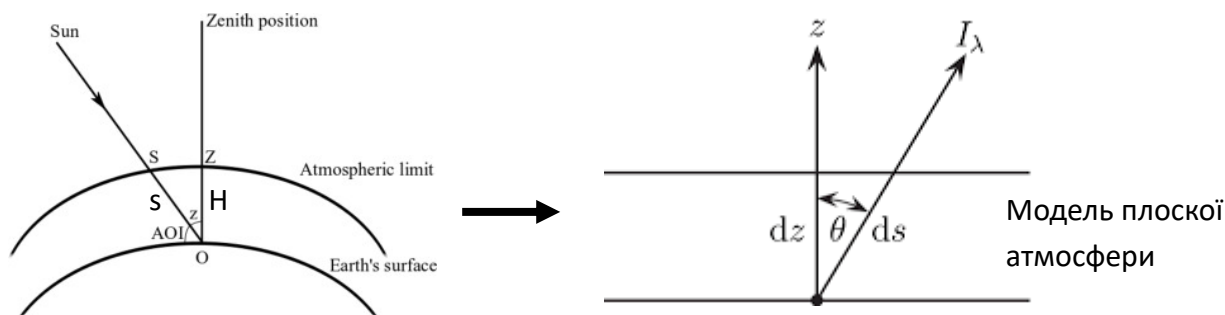
де k - показник ослаблення. Якщо $k = const$, тоді $\tau = k \int_0^s \rho ds$. У зеніті матимемо:

$$I_0 = I^0 e^{-k \int_0^H \rho ds} = I^0 e^{-\tau_0}$$

де H – висота атмосфери.

На деякій зенітній відстані z мусимо користуватися більш загальним виразом. Проте, часто використовується модель плоскої атмосфери, яка дає хороші результати при $z < 70^\circ$, сильно спрощує розрахунки. У ній шар атмосфери апроксимується двома площинами, і тоді

$$s = \frac{H}{\cos(z)} = H \sec(z)$$



Оптична товщина на зенітному куті виражатиметься через оптичну товщину у зеніті:

$$\tau(z) = -k \int_0^s \rho ds = -k \int_0^H \sec(z) \rho dH = \sec(z) \tau_0$$

$$I(z) = I^0 e^{-\tau_0 \sec(z)}$$

У загальному випадку не для спрощеної моделі:

$$I(z) = I^0 e^{-F(z)k} = I^0 p^{M(z)}$$

$F(z)$ – повітряна маса атмосфери, $p = e^{-F(0)k}$ – коефіцієнт прозорості атмосфери, $M(z) = \frac{F(z)}{F(0)}$ – також називають масою атмосфери.

Вам надані спостережні дані видимої зоряної величини m зорі Капелли 16 грудня 2025 року у м. Києві на різних висотах h над горизонтом.

$h, ^\circ$	80	70	60	50	40	30	25	20	17
m, mag	0.18	0.19	0.20	0.22	0.25	0.31	0.36	0.43	0.49

За цими даними знайдіть видиму зоряну величину у зеніті та позаатмосферну зоряну величину.

Розв'язок

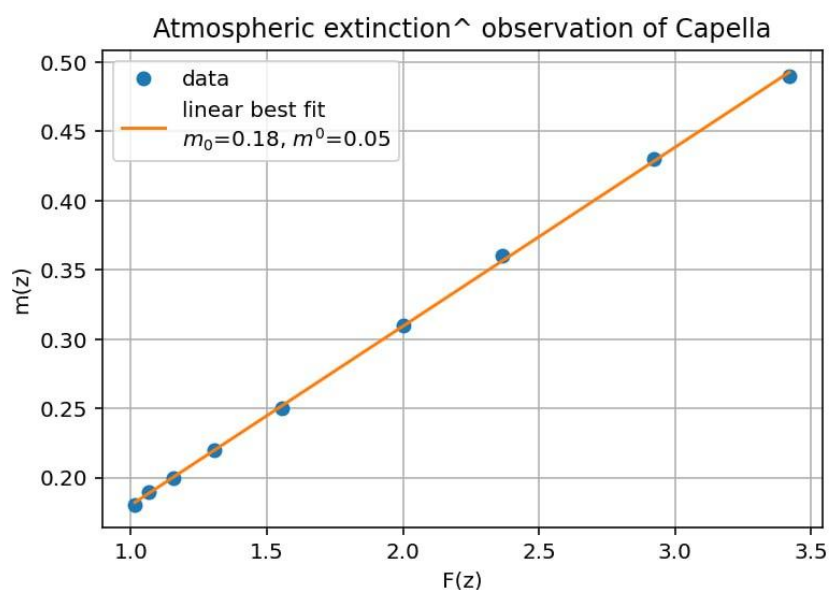
Маємо залежність $m(h)$. Також відомо, що

$$I(z) = I^0 e^{-F(z)k} = I^0 e^{-F(0)kM(z)} = I^0 (e^{-kF(0)})^{M(z)} = I^0 p^{M(z)} = I^0 (e^{-\tau_0})^{\sec(z)}$$

З іншого боку: $\frac{I(z)}{I^0} = 10^{-0.4(m(z)-m^0)} = e^{-\tau_0 \sec(z)}$

Прологарифмуємо рівність:

$$-0.4(m(z) - m^0) = -\lg(e) \tau_0 \sec(z) = -a \cdot 0.4 \cdot \sec(z) \Rightarrow m(z) = m^0 + a \sec(90^\circ - h)$$

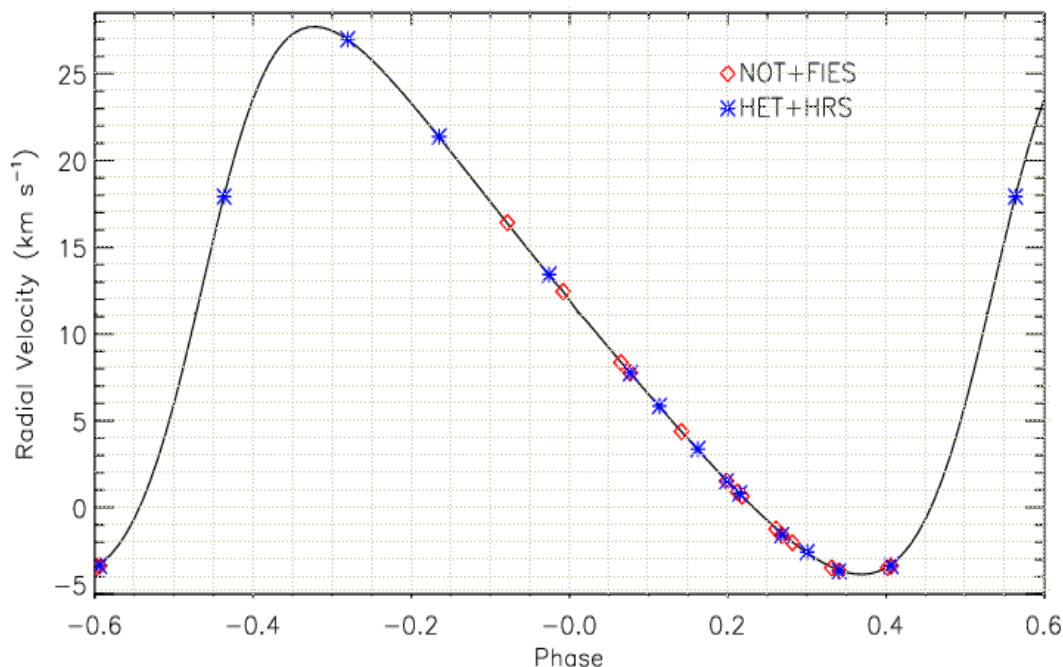


Таким чином при побудові залежності $m(z)$ від $F(z) = \sec(90^\circ - h)$ повинні отримати лінійну залежність. З неї визначаємо коефіцієнти m^0 та a , де $m^0 = 0.05$, а $a = 0.13$. Тоді у зеніті $h = 90^\circ \Rightarrow F(z = 0) = 1 \Rightarrow m_0 = m^0 + a = 0.13 + 0.05 = 0.18$.

3. Подвійність в графіках та цифрах (Зазубик Д.)

На рисунку нижче дано криву променевої швидкості компоненти подвійної системи.

А) Опишіть точний метод знаходження променевої швидкості руху центру мас та знайдіть цю швидкість з кривої, наведеної нижче.



Графік взято зі статті Gómez Maqueo Chew, Y., Morales, J. C., Faedi, F., García Melendo, E. J., Hebb, L., Rodler, F., ... & Montañés-Rodríguez, P. (2014). The EBLM project. II. A very hot, low-mass M dwarf in an eccentric and long-period, eclipsing binary system from the SuperWASP Survey. *Astronomy & astrophysics*, 572, A50-1.

У таблиці нижче подано залежність променевої швидкості (у км/с) двох компонент подвійної системи від часу з деякої дати (у добах). u_r – виміряна променева швидкість, v_r – променева швидкість з вирахуванням рухом центру мас. $phase$ – фаза (0 не обов'язково позначає перицентр).

Date	$u_{r,1}$	$u_{r,2}$	phase	$v_{r,1}$	$v_{r,2}$
857.868	69.2	-146	0.019	84.2	-131
859.644	-18.2		0.137	-3.2	
860.633	-19.6		0.203	-4.6	
861.626	-57.8	87	0.268	-42.8	102
862.625	-62.2	104.2	0.335	-47.2	119.2
864.607	-70.2	106.2	0.466	-55.2	121.2
925.649	-70.3	91.2	0.51	-55.3	106.2
926.605	-52	82.8	0.574	-37	97.8
928.509	-18.5		0.7	-3.5	
931.486	70.8	-146.4	0.897	85.8	-131.4
932.472	81.1	-171.5	0.962	96.1	-156.5
933.487	59.4	-137.3	0.03	74.4	-122.3
934.484	-23.4		0.096	-8.4	
936.527	-66.4	60.4	0.231	-51.4	75.4

939.468	-70.3	99.7	0.426	-55.3	114.7
995.58	-16		0.144	-1	
996.537	-50.8	36.4	0.207	-35.8	51.4
998.543	-80.6	96.8	0.34	-65.6	111.8
999.543	-74.6	101.3	0.406	-59.6	116.3
1000.503	-78.4	97.9	0.47	-63.4	112.9
1299.704	-64.7	93.3	0.294	-49.7	108.3
1300.712	-75.2	97.5	0.36	-60.2	112.5
1301.692	-75.7	102.2	0.425	-60.7	117.2
1302.697	-72.8	97.7	0.492	-57.8	112.7
1304.71	-52.7	49.3	0.625	-37.7	64.3
1322.507	9.7	-83.5	0.804	24.7	-68.5
1323.669	66.2	-140.8	0.882	81.2	-125.8
1327.501	-26.5	-9.1	0.135	-11.5	5.9
1328.53	-24.6		0.206	-9.6	
1329.471	-53.2	55.5	0.266	-38.2	70.5
1330.497	-82	87.3	0.334	-67	102.3
1331.575	-82.1	96.6	0.405	-67.1	111.6
1332.585	-82.2	89.2	0.472	-67.2	104.2
1669.664	27.9	-76.9	0.806	42.9	-61.9
1670.655	49.9	-130.1	0.871	64.9	-115.1
1671.657	75.9	-169.3	0.938	90.9	-154.3
1672.64	78.5	-165.7	0.003	93.5	-150.7
1673.624	42.2	-121.1	0.068	57.2	-106.1

Дані взято зі статті: Rauw, G., Sana, H., Gosset, E., Vreux, J. M., & Jehin, E. (2000). A new orbital solution for the massive binary system HD 93403. *Astronomy & Astrophysics*, 360(3), 1003-1010.

Б) Побудуйте криву променевих швидкостей $v_{r,1}$ та $v_{r,2}$ з вирахуваною швидкістю центру мас на одному графіку в залежності від фази (як у частині А).

В) Визначте період обертання системи.

Розв'язок

А) Ідея визначення швидкості руху центру мас полягає у тому, що середня за період променева швидкість (віднімаючи швидкість руху системи як цілого) повинна дорівнювати 0. Якби це було не так, а наприклад, додатна, то відносно центру зоря б постійно віддалялася від нас, що не логічно.

$$\int_0^T V_r dt = 0$$

V_r – проекція на промінь зору швидкості зорі відносно центру мас системи.

$$V_{r_{tot}} = V_r + V_{center}$$

$$\int_0^T (V_{r_{tot}} - V_{center}) dt = 0 \Rightarrow \int_0^T V_{r_{tot}} dt = \int_0^T V_{center} dt = V_{center} T$$

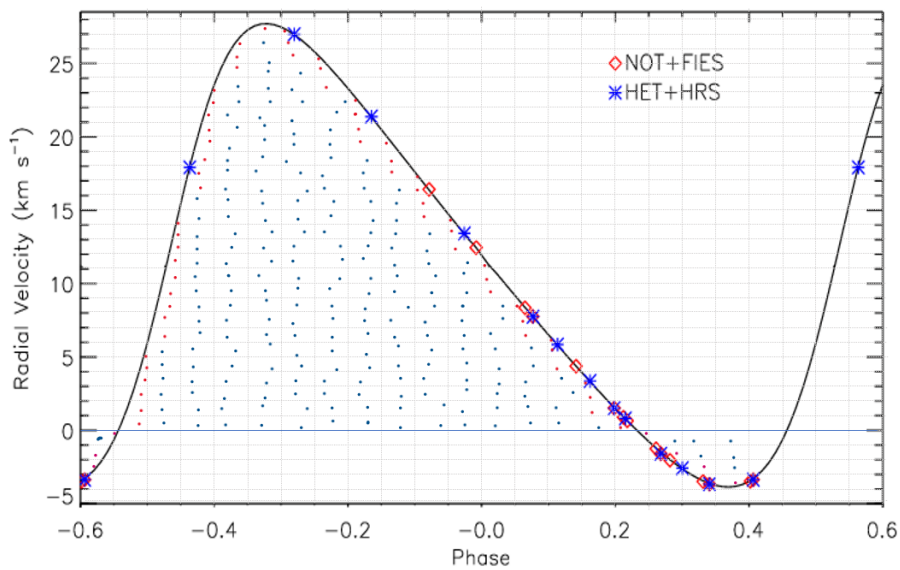
$$V_{center} = \frac{\int_0^T V_{r_{tot}} dt}{T}$$

$$\frac{t}{T} = \varphi$$

$$V_{center} = \int_0^1 V_{r_{tot}} d\varphi = \int_{-0.6}^{0.4} V_{r_{tot}} d\varphi$$

Тобто для знаходження швидкості руху центру мас потрібно знайти площу під графіком радіальної швидкості відносно фази. Зручно почати з фази, що дорівнює -0.6 , а закінчити фазою 0.4 .

Інтеграл можна шукати, апроксимуючи функцію різними кривими, або знайти площу по клітинках, врахувавши неповні клітинки як $\frac{1}{2}$.



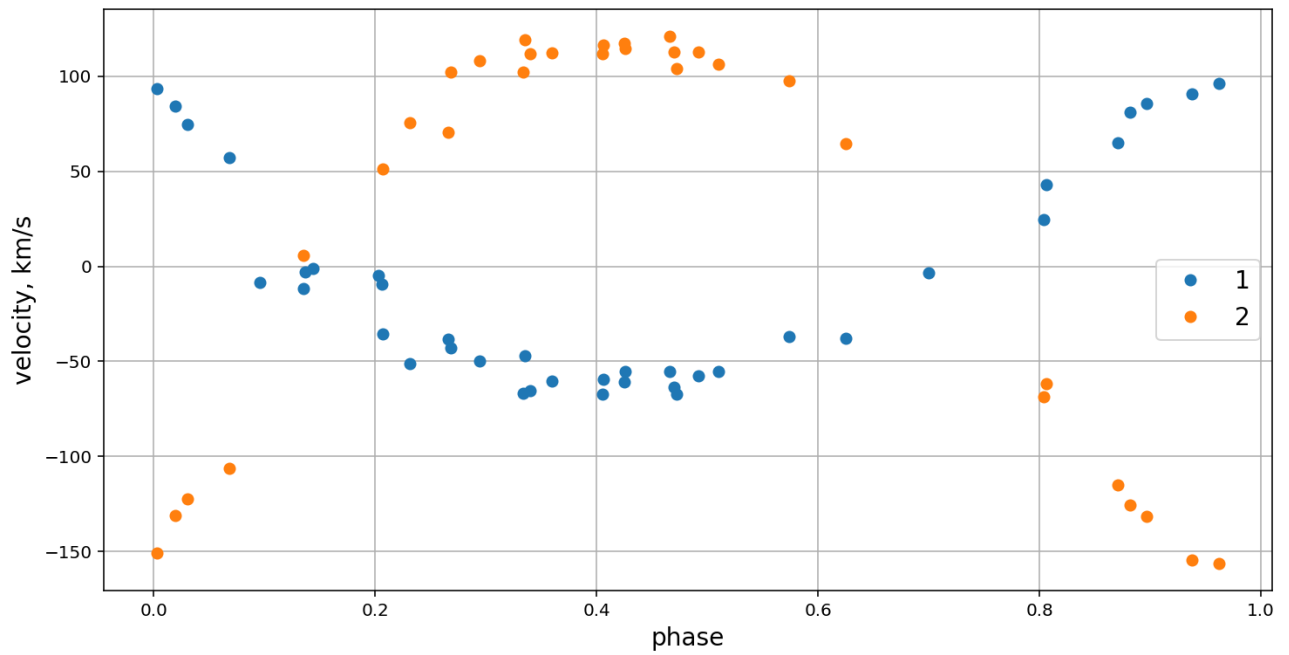
Обережно з урахуванням клітинок, які знаходяться під нулем (їх потрібно відняти).

Сумарна кількість повних клітинок над 0: 202, повних під 0: 7, неповних над 0: 61, неповних під 0: 9.

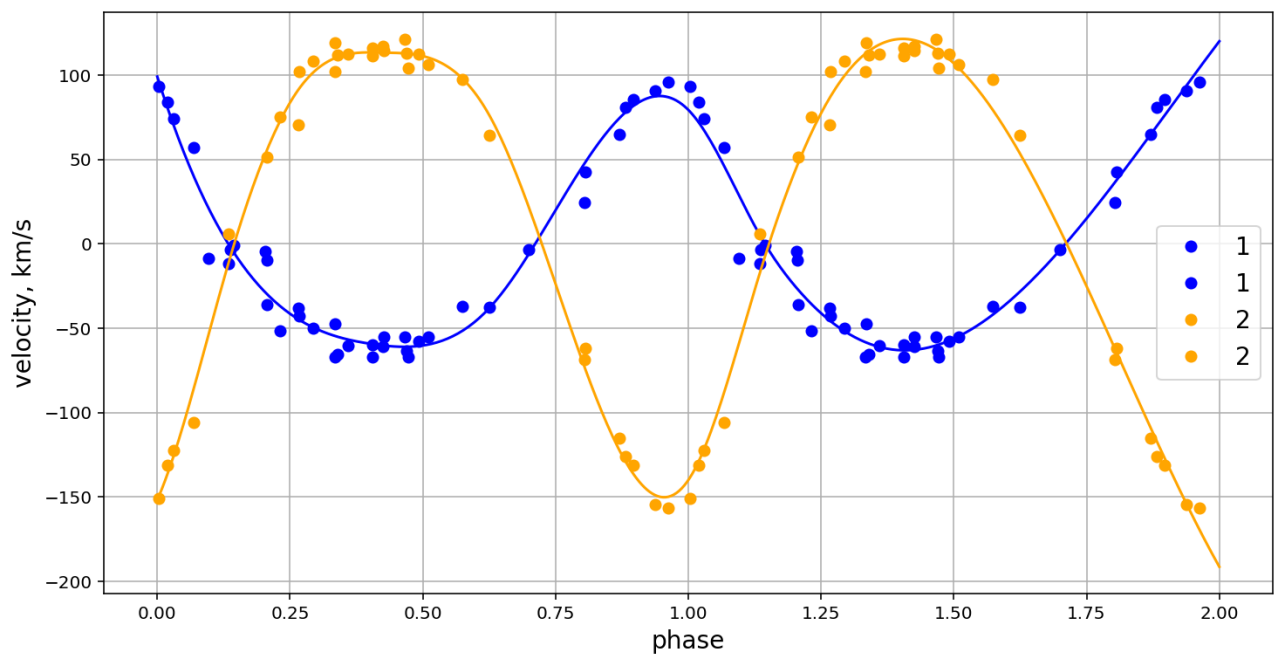
Отже, сумарна площа: $N = (202 - 7) + \frac{61-9}{2} = 221$

$$V_{center} = 221 * 0.05 * 1 \frac{KM}{c} \approx 11 \frac{KM}{c}$$

Б)



Можна провести приблизні криві, які допоможуть у знаходженні інших параметрів (на графіку нижче подвоєні межі для фази).



В) Оскільки фаза змінюється лінійно, то можна використати два значення фази для двох моментів часу і обчислити період наприклад:

Date	ur,1	ur,2	phase	vr,1	vr,2
857.868	69.2	-146	0.019	84.2	-131
931.486	70.8	-146.4	0.897	85.8	-131.4

$$T = 83.847 \text{ д}$$

І контрольне:

995.58 -16 0.144 -1

1000.503 -78.4 97.9 0.47 -63.4 112.9

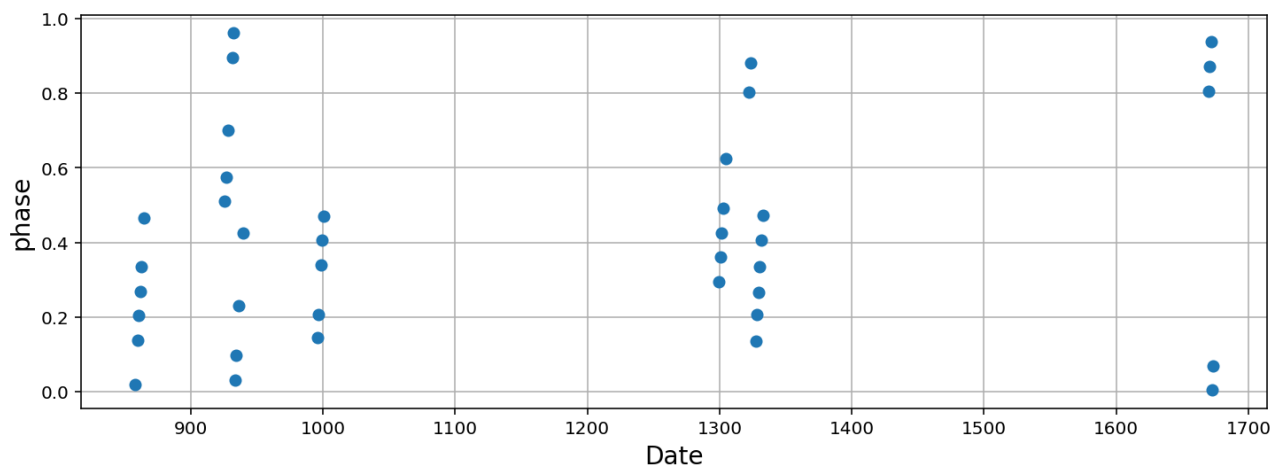
$$T = 15.184 \text{ д}$$

1301.692 -75.7 102.2 0.425 -60.7 117.2

1323.669 66.2 -140.8 0.882 81.2 -125.8

$$T = 48.135 \text{ д}$$

Як бачимо, періоди різні, але це наслідок того, що ми досліджуємо не один період, а кілька.
Побудуємо графік залежності фази від часу:



На цьому графіку добре видно, коли відбувається перехід на іншу «гілку».

Для визначення періоду можна взяти перші 6 точок:

Date	ur,1	ur,2	phase	vr,1	vr,2
857.868	69.2	-146	0.019	84.2	-131
859.644	-18.2		0.137	-3.2	
860.633	-19.6		0.203	-4.6	
861.626	-57.8	87	0.268	-42.8	102
862.625	-62.2	104.2	0.335	-47.2	119.2
864.607	-70.2	106.2	0.466	-55.2	121.2

$$T = \frac{864.607 - 857.868}{0.466 - 0.019} \text{ д} = 15.076 \text{ д} \approx 15.1 \text{ д}$$

Або можна використати наступні 5 точок чи навіть 9 точок:

925.649	-70.3	91.2	0.51	-55.3	106.2
926.605	-52	82.8	0.574	-37	97.8
928.509	-18.5		0.7	-3.5	
931.486	70.8	-146.4	0.897	85.8	-131.4
932.472	81.1	-171.5	0.962	96.1	-156.5

$$T = \frac{932.472 - 925.649}{0.962 - 0.51} \text{ д} = 15.095 \text{ д} \approx 15.1 \text{ д}$$